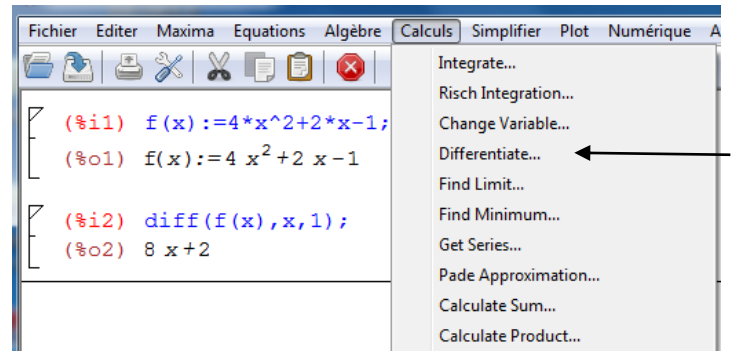


Fonctions dérivées et calcul formel

On peut utiliser pour vérifier une dérivée le logiciel MAXIMA, GEOGEBRA et/ou XCAS.

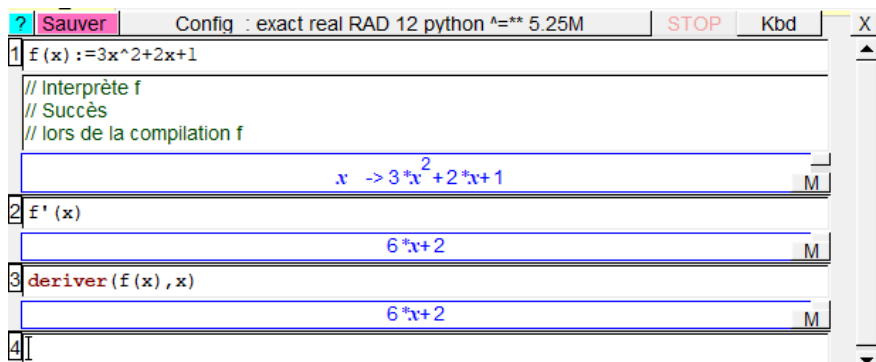
Utilisation de maxima :



MAXIMA peut s'installer sur une tablette et/ou un mobile Android.

Pour GEOGEBRA, il suffit de taper $f'(x)$ dans la barre de saisie après avoir saisi $f(x)$

Dans XCAS :



Exercices du livre :

Dérivées et opérations

Pour chacun des exercices 45 à 54, on donne l'expression de $f(x)$. Préciser sur quelle partie de \mathbb{R} , la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

45 Somme

- a. $f(x) = x^2 + 1$ b. $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + 4$
c. $f(x) = x^3 + x$ d. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 3$

46 Produit par un réel

- a. $f(x) = 4x$ b. $f(x) = 5x^2$
c. $f(x) = -3\sqrt{x}$ d. $f(x) = -\frac{2}{x}$

47 Somme et produit par un réel

- a. $f(x) = 2x^2 + 3x$ b. $f(x) = 2x + 1$
c. $f(x) = -4x + 6$ d. $f(x) = 2x^2 - 5x$
e. $f(x) = -x + 4$ f. $f(x) = 3x^5 - 2x^2$
g. $f(x) = 2\sqrt{x} + 4x$ h. $f(x) = -x^3 + x^2\sqrt{2} + 4x$

48 Somme et produit par un réel

- a. $f(x) = \frac{4x-1}{3}$ b. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
c. $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x + 5$ d. $f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - 5x}{4}$

49 Produit de deux fonctions

- a. $f(x) = x\sqrt{x}$ b. $f(x) = x^2(2x + 4)$
c. $f(x) = 4x(x - 5)$ d. $f(x) = x^3(x - \sqrt{x})$

50 Inverse

- a. $f(x) = \frac{1}{x-3}$ b. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$
c. $f(x) = \frac{2}{x+4}$ d. $f(x) = \frac{-5}{x^2+1}$

51 Quotient

a. $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

b. $f(x) = \frac{2x^2}{x+3}$

c. $f(x) = \frac{2x^2+5x+1}{x^2+1}$

d. $f(x) = \frac{2\sqrt{x}+3}{x}$

52 Calculs en vrac

a. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

b. $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$

c. $f(x) = (2-x)\sqrt{x}$

d. $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$

53 Calculs en vrac

a. $f(x) = (2x+1)^2$

b. $f(x) = x^2(x+3)$

c. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

d. $f(x) = \frac{x^4}{4} - 3x^2 + \frac{x}{5} - 3$

54 Calculs en vrac

a. $f(x) = x^3\sqrt{x}$

b. $f(x) = 2 - \frac{x}{x+6}$

c. $f(x) = -\frac{3}{2x+3}$

d. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3}$

Solutions du livre:

45 c. f est dérivable sur \mathbb{R} et

$$f'(x) = 3x^2 + 1.$$

d. f est dérivable sur \mathbb{R}^* et $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.

46 c. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f'(x) = -3 \times u'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{x}}.$$

47 a. f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 4x + 3$.

g. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} + 4 \times 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} + 4.$$

49 d. $f(x) = u(x) \times v(x)$ où $u : x \mapsto x^3$ est dérivable sur \mathbb{R} et $v : x \mapsto x - \sqrt{x}$ est dérivable pour tout $x > 0$.

De plus, $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc f est dérivable pour tout $x > 0$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 3x^2 \times (x - \sqrt{x}) + x^3 \times \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= 4x^3 - \frac{7}{2}x^2\sqrt{x} \end{aligned}$$

Pour simplifier, on utilise $x = (\sqrt{x})^2$ pour tout $x \geq 0$.

50 c. $f(x) = 2 \times \frac{1}{u(x)}$ où $u : x \mapsto x + 4$ est

dérivable sur \mathbb{R} et ne s'annule qu'en $x = -4$. Donc f est dérivable pour tout $x \neq -4$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times \frac{-u'(x)}{(u(x))^2} = 2 \times \frac{-1}{(x+4)^2} \\ &= \frac{-2}{(x+4)^2}. \end{aligned}$$

51 a. f est une fonction rationnelle, dérivable sur son ensemble de définition, donc f est dérivable en tout $x \neq 3$. Pour

tout $x \neq 3$, $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x + 1$ et

$v(x) = x - 3$ donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } f'(x) &= \frac{2 \times (x - 3) - (2x + 1) \times 1}{(x - 3)^2} \\ &= \frac{-7}{(x - 3)^2} \text{ pour tout } x \neq 3. \end{aligned}$$

48 a. f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \frac{4}{3}$.

b. f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = x + \frac{1}{2}$.

c. f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \frac{x}{2} - 2$.

d. f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = x^3 + \frac{3}{2}x - 5$.

52 a. f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 4x - 5$.

b. f est dérivable pour tout $x \neq 2$ et $f'(x) = \frac{-7}{(x-2)^2}$.

53 a. f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 8x + 4$.

b. f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 3x^2 + 6x$.

c. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$.

d. f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = x^3 - 6x + \frac{1}{5}$.

54 a. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{7}{2}x^2 \times \sqrt{x}$

b. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-6\}$ et $f'(x) = \frac{-6}{(x+6)^2}$

c. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$ et $f'(x) = \frac{6}{(2x+3)^2}$

d. f est dérivable sur

$] -\infty; -\sqrt{3}[\cup] -\sqrt{3}; \sqrt{3}[\cup] \sqrt{3}; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x^2 - 3)^2}.$$